МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 5-7 КЛАССОВ УЧРЕЖДЕНИЙ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО И БАЗОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РЕШЕНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА

2016/2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

5 КЛАСС

1. Каждый из четытрех гномов – Беня, Веня, Женя и Сеня либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Гномы завели вот такой разговор: Беня – Вене: «Ты врун». Женя – Бене: «Сам ты врун!» Сеня – Жене: «Оба они вруны. Да и ты тоже». Кто из них говорит правду?

Ответ*: Веня и Женя.*

Решение: *Предположим, что Сеня говорит правду. Тогда его фраза является правдой, и три остальных гнома — вруны. Получаем противоречие: врун Женя говорит правду о вруне Бене. Потому Сеня — врун, и его утверждение, что Женя — врун, является ложным. Значит, Женя говорит правду. Тем самым, Беня — врун, а Веня говорит правду. Отметим, что фраза Сени "да оба они вруны" (относительно Бени и Вени) является ложной (несмотря на то, что Беня действительно врун), поскольку Веня — не врун.*

2. Числа 90 и 100 разделили на одно и то же число. В первом случае получили остаток от деления равный 18, во втором – остаток 4. Найдите делитель.

Ответ: ***24.***

Решение: *Пусть а – искомое число. Тогда 72 и 96 делятся на а (72=90-18, 96=100-4). Искомое число а больше самого большого остатка, т.е. а>18. Разложим 72 и 96 на простые множители. 72=2·2·2·2·3·3, 96=2·2·2·2·2·3. Общая часть разложения больше 18: 2·2·2·2·3=24.*

3. В некотором государстве 70 городов, а из каждого города выходит 10 дорог. Определите, сколько дорог в государстве.

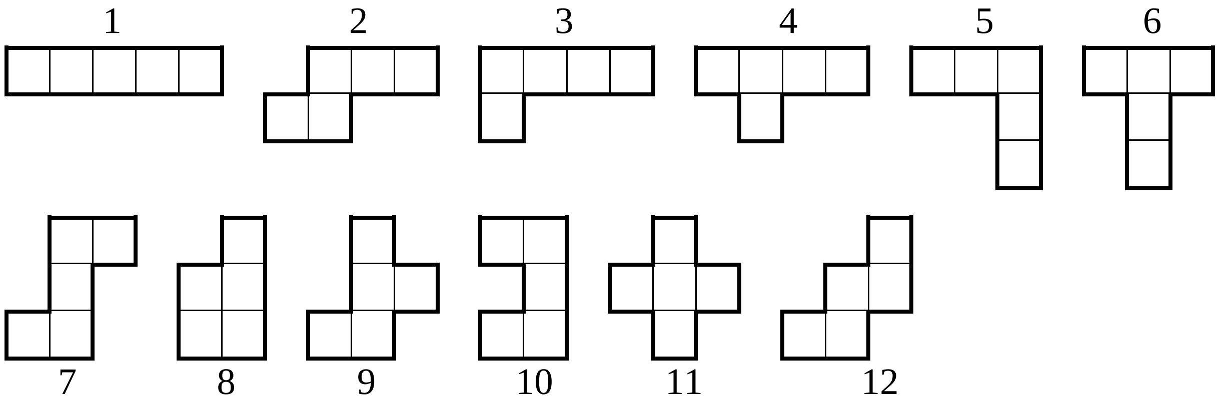
Ответ: ***350 дорог.***

Решение: *70·10/2=350.*

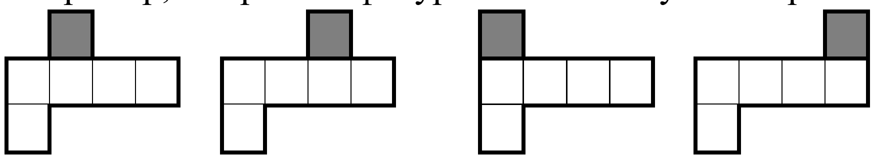
4. В вашем распоряжении песочные часы на 7 минут и на 11 минут. Выясните, как сварить яйцо за 15 минут, переворачивая песочные часы минимальное число раз. Ответ поясните.

Решение: *Одновременно пустим часы на 7 и на 11 минут. Когда пройдет 7 минут, начнем варить яйцо. Через 4 минуты 11-минутные часы остановятся. Перевернем 11-минутные часы и доварим яйцо. 4+11=15.*

5. Развертка куба состоит из шести квадратов. Ее можно получить, прикладывая шестой квадрат к какому-либо квадрату фигурки пентамино.



Например, из третьей фигуры можно получить 4 различные развертки куба:



Определите точное число разверток куба.

Ответ: ***11 разверток.***

Решение: *Из фигур 1, 5, 8 и 10 нельзя получить развертку куба описанным способом. Из остальных восьми можно (из третьей фигуры четырьмя способами, из 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12 одним).*

6 КЛАСС

1. Число x – натуральное. Два из пяти утверждений о нем верные, а три неверные: 1) $x > 25$; 2) $x < 75$; 3) $4x > 25$; 4) $x > 19$; 5) $x > 5$. Найдите число x.

Ответ: $\boldsymbol{x = 6}$.

Решение: *Если первое утверждение верно, то верны все пять неравенств (итого 5 верных утверждений). Если первое – неверно, а четвертое верно, то верны второе, третье и пятое (итого 4 верных утверждения). Если первое и четвертое неверны, а верно третье утверждение, то верны второе и пятое утверждения (итого 3 верных утверждения). Если верно пятое утверждение, а первое, третье и четвертое неверны, то верно еще только второе утверждени (итого 2 верных утверждения). Получаем, что* $x > 5$, *но* $4x < 25$. *Значит,* $x = 6$.

2. Выясните, верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три числа, сумма которых делится на 3. Ответ поясните.

Ответ: ***Верно.***

Решение: *При делении на 3 возможны остатки 0, 1 или 2. Так как* $7 = 3\cdot 2+1$, *то найдутся три числа, дающие одинаковый остаток при делении на три. Сумма таких чисел делится на 3.*

3. В турнире принимают участие 25 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент времени каждый из них сыграл ровно 9 партий? Ответ поясните.

Ответ: ***Не может.***

Решение: *Если шахматистов изобразить вершинами графа, а каждую партию – ребром графа, то получим граф с нечетным количеством вершин нечетной степени, чего быть не может.*

4. Имеются 3 бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержатся соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну на две части.

Решение:

3 ведра	0	3	1	1	3	0
6 ведер	4	4	6	2	2	5
7 ведер	6	3	3	7	5	5

5. На поле для игры "морской бой" размером 10×10 клеток поставили корабль размером 3×1 клетки. Определите, какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка в него попасть?

Ответ: ***33 выстрела.***

Решение: *Возможный вариант стрельбы*

		*			*			*	
	*			*			*		
*			*			*			*
		*			*			*	
	*			*			*		
*			*			*			*
		*			*			*	
	*			*			*		
*			*			*			*
		*			*			*	

7 КЛАСС

1. Найдите все задуманные двузначные числа А, если из следующих четырех утверждений о них только два верны: 1) А+7 есть точный квадрат; 2) А–10 есть точный квадрат; 3) число А кратно 5; 4) число А кратно 23.

Ответ: ***35, 46 и 74.***

Решение: *Среди двузначных чисел нет таких, которые бы одновременно делились на 5 и на 23. Значит третье и четвертое утверждения одновременно верными быть не могут. Выпишем все двузначные числа, являющиеся точными квадратами: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Первое и второе утверждения также не могут быть одновременно верными: если это так,* *то разность двух точных квадратов равна 17 (10=7=17), чего быть не может. Вначале отнимем от чисел 16, 25, 36, 49, 64, 81 по 7 единиц и проверим на истинность 3 и 4 утверждения. Затем прибавим к каждому из чисел 16, 25, 36, 49, 64, 81 по 10 единицам и проделаем на истинность 3 и 4 утверждения. Получаем: 35 (верны 2 и 3 утверждения), 46 (верны 2 и 4 утверждения), 74 (верны 1 и 2 утверждения).*

2. Докажите, что найдется число вида 11…10…00, кратное 2017.

Доказательство: *Рассмотрим 2018 чисел вида 1, 11, 111, 1111, … Среди них найдутся два числа с одинаковыми остатками от деления на 2017. Разность этих двух чисел имеет вид 11…10…00 и делится на 2017.*

3. Выясните, может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 105 дорог. Ответ поясните.

Ответ: ***Может.***

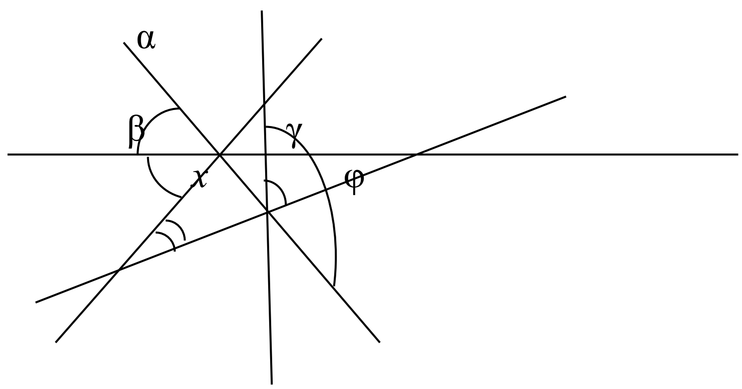
Решение: *Пусть в государстве x городов. Тогда дорог в нем* $x \cdot 3/2 = 105$. *Отсюда* $x = 70$. *Если изобразить города в государстве вершинами графа, а каждую дорогу – ребром графа, то получим граф с четным количеством вершин нечетной степени. Такой граф существует.*

4. Имеются два сосуда емкостью 1 литр каждый, один из них наполнен кофе, другой пуст. Кофе последовательно переливают из первого сосуда во второй, из второго – в первый, из первого – снова во второй и т.д., причем доля отливаемого кофе составляет ½, 1/3, ¼ и т.д. от количества кофе в сосуде, из которого он отливается. Определите, сколько кофе будет в каждом из сосудов после 225 переливаний.

Ответ: ***По ½ литра.***

Решение: *После первого переливания в первом сосуде останется ½ литра кофе. После второго* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{3})$. *После четвертого*
$\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})$, … , *после 225-го*
$\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot \ldots \cdot(1+\frac{1}{225})\cdot(1-\frac{1}{226}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots=\frac{1}{2}$.

5. Петя начертил в тетради несколько прямых так, как показано на рисунке. После этого он измерил величины углов α, β, γ и φ. Транспортир у мальчика сломался, и он не смог измерить угол *x*. Найдите градусную меру угла *x*.



Ответ: $\alpha + \beta + \gamma - \varphi$.